



TITLE:

排他的集団サービス待ち行列の近似解析(待ち行列理論とその応用)

AUTHOR(S):

渡辺, 正信; 清水, 敏夫; 高橋, 豊; 長谷川, 利治

CITATION:

渡辺, 正信 ...[et al]. 排他的集団サービス待ち行列の近似解析(待ち行列理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1983, 490: 227-247

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103510>

RIGHT:

排他的集団サービス待ち行列の近似解析

日電・C&C 研 渡辺 正信 (Masanobu Watanabe)

京大・工・数理 清水 敏夫 (Toshio Shimizu)

京大・工・数理 高橋 豊 (Yutaka Takahashi)

京大・工・数理 長谷川利治 (Toshiharu Hasegawa)

あらまし： 輸送形排他的集団サービス待ち行列システムにおける客の待ち行列長を求める二つの近似解析手法 (APPR-1 近似と APPR-2 近似) と、集団客の仮想待ち時間の平均値を求める近似解析手法を提案している。但し、客の待ち合い室の容量は無量大、客の到着は複合ポアソン分布、有限な容量をもつサーバの到着時間間隔は互いに独立で同一の一般分布に従うことを仮定している。本稿の近似解析手法は、排他的集団サービスにおけるサービス数を求めるために、その時点の待ち行列長を客の到着時の集団サイズの確率分布を使って近似しているので、システムの負荷がそれ程高くない時に有効となる。さらに、客の到着時の集団サイズの平均がサーバの容量より小さい場合は、APPR-1 近似が APPR-2 近似より近似

精度が良く，逆の場合は APPR-2 近似の方が良い。最後に，集團客の仮想待ち時間の平均値の特性を数値例により示した。

1. まえがき

集團到着の客が排他的集團サービスを受ける輸送形排他的集團サービス待ち行列システムを考える。このシステムには、容量（定員）が無限のひとつの待ち合い室があり、そこにはひとり以上の客の集團が複合ポアソン分布に従って到着する。尚、到着時に同一集團である客は、皆同一の属性を保持する。例えば、同一の目的地を持つという属性である。到着した客は、この待ち合い室に、到着順に単一の待ち行列を形成しサービスを待つ。但し、待ち合い室が空の時に到着した客でも、次のサービス時刻まで待たなければならぬ。一方、このシステムに、有限な容量をもつサーバ（乗り物）が、独立な一般分布に従って到着する。尚、このシステム（駅）の待ち合い室の客は、常に、到着したサーバを空の状態で見ることができる。すなわち、サーバによってこのシステム（駅）に輸送されて来た客は、すべてサービスを終了しサーバの状態を空とする。さらに、ここでのサービス規範を、排他的集團サービスとする。この排他的集團サービスとは、サーバが一回のサービスにおいて、到着時に同一集團であった客のみを

収容するサービス規範である。すなわち、客の待ち行列の先頭に、サーバの容量以上の集団客（到着時が同一であった客の集団）があれば、サーバはその容量だけの客を収容し、待ち合い室を出る。一方、待ち行列の先頭にいる集団客の客数がサーバの容量より少ない時は、サーバに空席が残ったとしても、その集団客のみを収容して待ち合い室を出る。さらに、サーバの到着時点で待ち合い室に客が居なければ、サーバは客を収容せずに待ち合い室を去る。このように、サービス時点が再生過程となり、空サービスを認めるシステムは、輸送形待ち行列システムと呼ばれる⁽¹⁾⁽²⁾。

従来の集団サービス待ち行列システムは、混合集団サービスというサービス規範を前提として解析された。この混合集団サービスとは、一回のサービスにおいて、到着時点が異なる客であってもサーバの容量以内であれば、先着順に混在して収容するというサービス規範のことである。この混合集団サービス規範の下で、Bailey 等^{(1)~(8)}は、単一待ち行列システムを解析し、Konheim 等⁽⁹⁾、渡辺等⁽¹⁰⁾は、ループ形、直列形待ち行列網を解析した。そこでは、客の待ち行列長、集団客の仮想待ち時間⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾に関する平衡解析又は、過渡解析が行なわれた。

本稿においては、従来の混合集団サービスではなく排他的集団サービスというサービス規範を前提とした集団サービス

待ち行列システムの解析を行なう。但し、このサービス規範に従えば、サービスが、待ち行列長ではなく、待ち行列の先頭の集団客の客数に依存して行なわれるため、そこでの待ち行列の厳密な解析は、極めて困難である。そこで、本稿では、輸送形排他的集団サービス待ち行列システムにおける客の待ち行列長および集団客の仮想待ち時間に対する近似解析手法を示している。すなわち、まず最初に、システムの定常条件を定め、その条件下で、サービス直前ににおける客の待ち行列長の母関数を求める二つの近似解析手法と、集団客の仮想待ち時間の平均を求める近似解析手法を提案している。次に、本稿で提案された待ち行列長に対する二つの近似手法の有効性を評価するため、これらの近似解をシミュレーション解と比較している。最後に、集団客の平均仮想待ち時間に関する数値例を示し、その特性を明らかにしている。

2. モデルの記述

図1に示す排他的集団サービス待ち行列システムモデルを考える。このモデルのパラメータとして次のものを定義する。

λ : 集団客の到着率(ポアソンレート)。

b_k : 到着時の客の集団サイズが k ($k \geq 1$) である確率($k \geq 1$)。

c : サーバ(乗り物)の容量(定員)。

$V(t)$: サーバの到着時間間隔の分布関数。

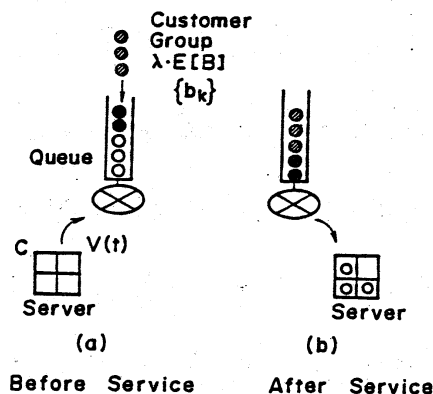


図1. 排他的集団サービス待ち行列システムモデル

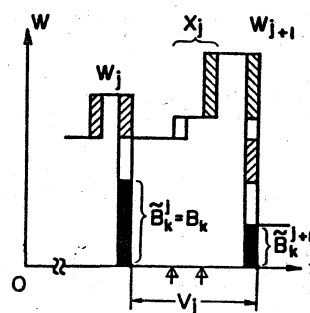


図2. 客の待ち行列長(W)

更に、このモデルを定式化するために次の用語(確率変数)を導入する。

V_j : j 番目と $j+1$ 番目のサーバの到着時間間隔。

X_j : V_j に到着する客の数。

W_j : j 番目のサーバが到着する直前の客の待ち行列長。

Y_j : j 番目のサーバに収容される客数(サービス数)。

B_k : k 番目に到着した集団客の客数(集団サイズ)。

\tilde{B}_k^j : j 番目のサーバが到着した時、待ち行列の先頭にいる k 番目に到着した集団客の客数。 $1 \leq \tilde{B}_k^j \leq B_k$ 。

このとき、図2に示した客の待ち行列長 W_j とサービス数 Y_j に関する次の再帰関係式が求まる。

$$W_{j+1} = W_j - Y_j + X_j \quad (1)$$

$$Y_j \leq \min[W_j, C] \quad (2)$$

$$Y_{j+1} = \begin{cases} \min[B_{k+1}, C] & (Y_j = \tilde{B}_k^j \leq C) \\ \min[\tilde{B}_k^j - Y_j, C] & (Y_j = C < \tilde{B}_k^j) \end{cases} \quad (3)$$

(3)式は、集団サービス数 Y_j が、その時点の待ち行列の先頭の集団客の客数 \tilde{B}_k^j によって決定されることを示す。このような待ち行列モデルの厳密解析は極めて困難となる。そこで、本稿では、サービス数 Y_j の確率分布を、客の到着時の集団客数 B_k の確率分布を用いて近似することにより、客の待ち行列長 W_j の確率母関数を求める近似解析手法を提案する。尚、上記確率変数で添字 j や k を省略する時は、特に j, k を意識しないことを意味する。

3. 解析

3.1. 定常条件

排他的集団サービス待ち行列システムが定常状態にある場合の客の待ち行列を解析する前に、このシステムの定常条件を求めておく。

リンドレーの定理⁽¹⁾から、このシステムの定常条件は、サービスの到着時間間隔に到着する客の平均数 $E[X]$ と、客の待ち行列がゼロでない場合の客の平均サービス数 $E[B/\lceil B/C \rceil]$ より、次のように求まる。

$$E[X] < E[B/\lceil B/C \rceil]. \quad (4)$$

$$\text{i.e. } \lambda \cdot E[B] \cdot E[V] < E[B/\lceil B/C \rceil] \quad (5)$$

となる。ここで、 $E[\cdot]$ は平均、 $\lceil a \rceil$ は a 以上の最小の整数を示す。

以下、システムは定常状態にあると仮定する。

3.2. 待ち行列長の近似解析

排他的集団サービスでは、客の待ちが存在する時に到着したサーバに収容される客数(サービス数)は、その時の待ち行列の先頭の集団客の客数により決定される。これは、このシステムの厳密な解析を行なうためには、待ち行列中のすべての集団客の状態を把握しなければならないことを意味する。このような厳密解析は、極めて困難である。そこで、サービス数が、その時点の待ち行列長により決定されるという仮定を設け、客の待ち行列長の近似解析を行なう。

まず、サーバの到着時間間隔に、待ち合い室に k 人の客が到着する確率 P_k は、

$$\begin{aligned} P_k &= \Pr[X_j = k] = \Pr[X = k] = \int_0^{\infty} \Pr[X = k | V = t] dV(t) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda t) \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot b_k^{n*} dV(t) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。但し、 $b_k^{n*} = \Pr[B_1 + B_2 + \dots + B_n = k]$ 。

このとき、 X の確率母関数 $P(z)$ は、到着時の集団客の客数 B の母関数 $B(z)$ と、 $V(t)$ を用いて次のように求まる。

$$P(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = \int_0^{\infty} \exp\{-\lambda t [1 - B(z)]\} dV(t) \quad (7)$$

$$B(z) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \quad (\text{但し、}|z| \leq 1) \quad (8)$$

そこで、式(1)と式(6)より次の式が成り立つ。

$$\Pr[W_{j+1} = k | W_j = l, Y_j = m] = \Pr[X_j = k + m - l] = P_{k+m-l} \quad (m \leq l) \quad (9)$$

上式の両辺に z^k を掛け z , k で和をとると,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[W_{j+1}=k | W_j=l, Y_j=m] z^k = P(z) z^{l-m} \quad (10)$$

となる。さらに、上式の W_j と Y_j に関する条件をはずすと次の式が求まる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[W_{j+1}=k] z^k = P(z) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\min(l, C)} \Pr[W_j=l, Y_j=m] z^{l-m} \quad (11)$$

ここで、客の待ち行列長が l のとき、 m 人がサーバに収容される確率 $q_m < l >$ を導入する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} q_m < l > &= \Pr[Y_j=m | W_j=l] \quad (l < C) \\ q_m < C > &= \Pr[Y_j=m | W_j=l] \quad (l \geq C) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

これは、サービス数 Y_j を、 $j-1$ 番目のサービス数 Y_{j-1} と独立に、 j 番目の待ち行列長 W_j のみから決まるとする近似式である。尚、 $q_m < l >$ に対する近似式の導出は、3.3. で述べる。

式(12)の導入により $\Pr[W_j=l, Y_j=m] = q_m < l > \Pr[W_j=l]$ と展開できるため、式(11)は、次のようになる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[W_{j+1}=k] z^k = P(z) \left[\sum_{m=0}^{C-1} \sum_{l=m}^{C-1} q_m < l > \Pr[W_j=l] z^{l-m} + \sum_{m=0}^C q_m < C > z^{-m} \sum_{l=C}^{\infty} \Pr[W_j=l] z^l \right] \quad (13)$$

さらに、定常状態の仮定から $\lim_{j \rightarrow \infty} \Pr[W_j=k] = w_k$ とおくと、 w_k の確率母関数 $R(z)$ は、次のように求まる。

$$R(z) \triangleq \sum_{l=0}^{\infty} w_l z^l = \left[\sum_{l=0}^{C-1} w_l z^l A_l(z) \right] / D(z) \quad (14)$$

$$\text{但し、} \quad A_l(z) \triangleq \sum_{m=0}^l q_m < l > z^{l-m} - \sum_{m=0}^C q_m < C > z^{l-m} \quad (15)$$

$$D(z) \triangleq z^C P'(z) - \sum_{m=0}^C q_m < C > z^{C-m} \quad (16)$$

ここで、式(14)の右辺の分子の C 個の未知数 w_l ($l=0, 1, \dots, C-1$)は、 $R(z)$ が $|z| \leq 1$ で解析的であることと、ルーシェの定理から $D(z) = 0$ が $|z| \leq 1$ に C 個の根をもつことから決定される⁽³⁾⁽⁹⁾。ただし、ルーシェの定理の適用条件として $D'(1) = \frac{dD(z)}{dz} \Big|_{z=1} > 0$ が必要である。すなわち

$$P'(1) < \sum_{m=0}^C m g_m < C \quad (17)$$

式(17)はシステムの定常条件(4), i.e. $E[X] = P'(1) < E[B/|B/C|]$, と、次の不等式(18)から求まる。

$$E[B/|B/C|] \leq \sum_{m=0}^C m g_m < C \quad (18)$$

不等式(18)は、客の待ち行列長が C 人以上の時の平均サービス数 $(\sum_{m=0}^C m g_m < C)$ が、客の待ち行列が 1 人以上の時の平均サービス数 $(E[B/|B/C|])$ 以上であることから成立つ。但し、等号は、 $C=1$ で成立つ。

今、 $|z| \leq 1$ での $D(z) = 0$ の根を $1, \xi_i$ ($i=2, 3, \dots, C$) とすると、 w_l ($0 \leq l \leq C-1$) は、次の連立方程式から求まる。

$$\sum_{l=0}^{C-1} w_l A_l'(1) = D'(1) \quad (19a)$$

$$\sum_{l=0}^{C-1} w_l \xi_i^l A_l(\xi_i) = 0 \quad (i=2, 3, \dots, C) \quad (19b)$$

式(19a)は $\lim_{z \rightarrow 1} R(z) = 1$ より求めた。

この時、客の平均待ち行列長 $E[W]$ は、次のように求まる。

$$E[W] \triangleq R'(1) = \frac{\sum_{l=0}^{C-1} w_l [A_l'(1) \{2lD'(1) - D''(1)\} + A_l''(1) D'(1)]}{2\{D'(1)\}^2} \quad (20)$$

$$\text{但し, } A_l'(1) = \sum_{m=0}^C m q_m \langle C \rangle - \sum_{m=0}^l m q_m \langle l \rangle \quad (2/a)$$

$$A_l''(1) = \sum_{m=0}^l m(m+1) q_m \langle l \rangle - \sum_{m=0}^C m(m+1) q_m \langle C \rangle + 2C A_l'(1) \quad (2/b)$$

$$D'(1) = \sum_{m=0}^C m q_m \langle C \rangle - P'(1) \quad (2/c)$$

$$D''(1) = 2\{P'(1)\}^2 - 2CP'(1) - P''(1) + 2C \sum_{m=0}^C m q_m \langle C \rangle - \sum_{m=0}^C m(m+1) q_m \langle C \rangle \quad (2/d)$$

3.3. $q_m \langle l \rangle$ の近似

客の待ち行列長が l 人のときサービス数が m 人である確率 $q_m \langle l \rangle$ の導入により、客の待ち行列長に対する近似的確率母関数 $R(z)$ を求めることができた。ここでは、 $q_m \langle l \rangle$ の具体的導出法について言及する。すなわち、客の到着時の集団サイズ k の確率分布 $\{b_k\}$ を使って $q_m \langle l \rangle$ を求める2つの近似を示す。

3.3.1. 第1近似 (APPR-1 近似)

$q_m \langle l \rangle$ の第1近似式は、次のとおりである。

$$q_m \langle l \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_k C + m / \sum_{n=1}^l \sum_{k=0}^{\infty} b_k C + n \quad (1 \leq m \leq l \leq C) \quad (22)$$

この第1近似式は、サービス数が、ほとんどの場合その集団客の到着時の集団サイズに等しいと仮定して得られた式である。すなわち、到着時に同じ集団であった客は、サービスも同時にすれ積み残しは、ほとんど生じないと考えた。したがって、この第1近似式は、客の到着時の平均集団サイズが、サーバの容量よりも十分小さい場合を想定している。尚、このことは、システムの負荷の大小を言及しているわけではないうことに留意されたい。

3.3.2. 才2近似 (APPR-2 近似)

$q_m < l$ の才2近似式は、次のものである。

$$q_m < l = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kc+m} / \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kc+n} \quad (1 \leq m \leq l \leq C-1) \quad (23a)$$

$$q_m < l = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kc+m} / \left\{ \sum_{n=1}^{C-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kc+n} + \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=0}^{C-1} b_{kc+n} \right\} \quad (1 \leq m \leq C-1) \quad (23b)$$

$$q_c < c = \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=0}^{C-1} b_{kc+n} / \left\{ \sum_{n=1}^{C-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kc+n} + \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=0}^{C-1} b_{kc+n} \right\} \quad (23c)$$

この才2近似式において、 $1 \leq l \leq C-1$ の場合 (23a) は、才1近似式と同じである。一方、 $l \geq C$ の場合 (23b) (23c) は、サービス数が C 人である場合の重みを考慮したものである。したがって、この才2近似式は、ほとんどの場合積み残しが生ずる場合、すなわち、客の到着時の平均集団サイズがサーバの容量よりも十分大きい場合を想定している。

尚、以上の才1近似式、才2近似式とも、サーバが到着した時の客の待ち行列が、ほとんどの場合、ひとつの客集団（到着時と同じ集団）だけで構成されていることを想定している。すなわち、システムの負荷が十分小さいことを想定した近似式である。

3.4. 集団客の仮想待ち時間解析

集団客の待ち時間とは、集団客が待ち合室に到着してから、その集団客の最後の客がサーバに収容されるまでの時間と定義される。ところが、任意の時刻に到着する集団客の待ち時間を解析するのは極めて困難である。そこで、サーバが

到着する直前という特定の時刻に到着する集団客の待ち時間を考える。すなわち、システムが定常状態にあるときの集団客の待ち時間を調査するため、サーバの到着直前に仮想の集団客を、既に形成された客の待ち行列の最後に加えるわけである。この仮想の集団客の待ち時間を、集団客の仮想待ち時間と呼ぶ⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。以下、前述の仮定の下で、集団客の仮想待ち時間の平均値の近似解を求める手法を提案する。

ここで、次の用語(確率変数)を定義する。

M : 仮想の集団客のサイズ

W : 仮想の集団客が到着した時点(サーバ到着直前)の待ち合室での客の待ち行列長。

H_j : 仮想の集団客が到着してから j 番目のサーバが到着する直前の、仮想の集団客より前方の客の待ち行列長(仮想の集団客とそれ以後に到着する客を含まない)。尚、仮想の集団客の到着直後のサーバを 0 番目とする。

VW_M : サイズが M の仮想の集団客の仮想待ち時間。図 3 を参照。

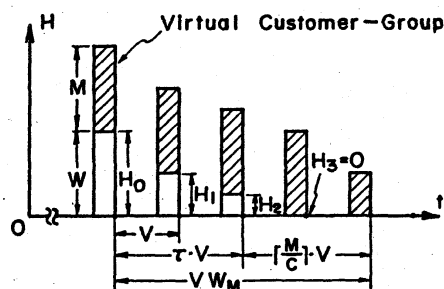


図3. 集団客の仮想待ち時間 (VM_M)

このとき, VW_M は、次の式で示される。

$$VW_M = (\tau + \lceil M/c \rceil) \cdot V \quad (W > 0 \text{ の時}) \quad \text{又は} \quad (\lceil M/c \rceil - 1) \cdot V \quad (W = 0 \text{ の時}) \quad (24)$$

ここで, V はサーバの到着時間間隔, $\lceil a \rceil$ は a 以上の最小の整数, τ は次に定義するものである。

$$\tau \triangleq r \Leftrightarrow H_j > 0 \quad (0 \leq j \leq r); \quad H_{r+1} \leq 0 \quad (25)$$

ただし, $H_0 = W > 0$ とする。

VW_M の平均 $E[VW_M]$ は、式(24)より次のようになる。

$$E[VW_M] = (E[\tau] + \lceil M/c \rceil) E[V] \cdot Pr[W > 0] + (\lceil M/c \rceil - 1) E[V] Pr[W = 0] \quad (26)$$

したが, τ , $E[VW_M]$ を求めるためには $E[\tau]$ を求めねばよい。

そこで, 次の確率 $G^{(r)}(n)$ を導入する。

$$G^{(r)}(n) \triangleq Pr[H_j > 0 \quad (0 \leq j \leq r-1), H_r = n] \quad (n > 0) \quad \text{or} \quad 0 \quad (n \leq 0) \quad (27)$$

但し, $G^{(0)}(n) \triangleq Pr[H_0 = W = n] \quad (n > 0)$ 。

この $G^{(r)}(n)$ は、定義から次の漸化式を満たす。

$$G^{(r)}(n) = \sum_{l=n}^{n+c} G^{(r-1)}(l) \cdot q_{l-n} \quad (28)$$

今, $G^{(r)}(n)$ の母関数を $L^{(r)}(x)$, $L^{(r)}(x)$ の母関数を $C(x, y)$ とする。

$$L^{(r)}(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} G^{(r)}(n) x^n \quad (29)$$

$$C(x, y) \triangleq \sum_{r=0}^{\infty} L^{(r)}(x) y^r \quad (30)$$

このとき, $E[\tau]$ と $C(x, y)$ の関係は、次のようになる。

$$C(1, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} L^{(r)}(1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G^{(r)}(n) = \sum_{r=0}^{\infty} Pr[\tau \geq r] = 1 + E[\tau]$$

$$\text{故に,} \quad E[\tau] = C(1, 1) - 1 \quad (31)$$

次に, $C(1, 1)$ を求める。式(28)(29)(30)から $C(x, y)$ は,

$$C(x, y) = \{x^C L^{(0)}(x) - y \sum_{l=1}^C F_l(y) U_l(x)\} / [x^C - y Q(x)] \quad (32)$$

となる。ここで,

$$U_l(x) \triangleq Q(x) x^l - Q_l(x) x^C \quad (33)$$

$$Q(x) \triangleq \sum_{k=0}^C q_k \langle C \rangle x^{C-k} \quad (34)$$

$$Q_l(x) \triangleq \sum_{k=0}^{l-1} q_k \langle l \rangle x^{l-k} \quad (1 \leq l \leq C) \quad (35)$$

尚, $L^{(0)}(x)$ は、定義より $W(z)$ の母関数である。故に, $W(z)$ の母関数を $R(x)$ とすれば, $L^{(0)}(x)$ は次のように表わせる。

$$L^{(0)}(x) = [R(x) - R(0)] / [1 - R(0)] = [R(x) - w_0] / [1 - w_0] \quad (36)$$

この $R(x)$ は、式(14) から求まる。

但し、式(32)の右辺の分子の未知数 $F_l(y)$ ($l=1, 2, \dots, C$) は、その分母の式を0とした方程式が、ルーシエの定理より, $|x| < 1$, $|y| < 1$ で C 個の根 $\{\eta_t(y) | t=1, 2, \dots, C\}$ をもつことと, $C(x, y)$ が $|x| < 1$, $|y| < 1$ で解析的であることより求まる。すなわち, $\eta_t(y)$ ($1 \leq t \leq C$) を $x^C - y Q(x) = 0$ の単根とすると, 次の連立一次方程式の解として $F_l(y)$ ($1 \leq l \leq C$) が求まる。

$$\sum_{l=1}^C U_l(\eta_t(y)) F_l(y) = [\eta_t(y)]^C L^{(0)}(\eta_t(y)) / y \quad (t=1, 2, \dots, C) \quad (37)$$

以上, 式(32), (36), (37) から $C(x, y)$ が決まり $C(1, 1)$ が求まる。

すなわち, まず, $C(x, y)$ で $y \uparrow 1$ としたものを $C(x, 1)$ とする

$$C(x, 1) = [x^C (R(x) - w_0) - (1 - w_0) U(x)] / [(1 - w_0) x^C - Q(x)] \quad (38)$$

ただし,

$$U(x) = \sum_{l=1}^C F_l(1) U_l(x) \quad (39)$$

ここで, $x \uparrow 1$ とすれば,

$$C(1, 1) = [R(1) + (1 - w_0)(C - \bar{Q}(1))] / [(1 - w_0)(C - \bar{Q}(1))] \quad (40)$$

これと、式(31)より

$$E[\tau] = [R(1) + (1 - w_0)(\bar{Q}(1) - \bar{Q}(1))] / [(1 - w_0)(C - \bar{Q}(1))] \quad (41)$$

故に, M 人からなる集団客の仮想待ち時間の平均値 $E[VW_M]$ は、式(26) (41)より

$$E[VW_M] = \left[\frac{M}{C} \right] E[V] + \{ E[\tau](1 - w_0) - w_0 \} E[V] \quad (42)$$

となる。

4. 数値例と評価

客の到着時の集団サイズの確率分布が幾何分布に従うときのシステムの定常条件を示し, その下で、客の待ち行列長に対する二つの近似手法 (APPR-1 近似と APPR-2 近似) の評価を数値例により行なう。次に, 集団客の仮想待ち時間の平均値の数値例を示し, その特性を述べる。

4.1. 定常条件と利用率

客の到着時の集団サイズ B が, 平均 $E[B] = 1/p$ の幾何分布 $\{b_k | b_k = \Pr[B=k] = p(1-p)^{k-1} (k \geq 1)\}$ に従うとき, システムの定常条件は、式(5)より次のようになる。

$$\lambda \cdot E[V] / p < E[B / \lceil B/C \rceil] \quad (43)$$

ただし

$$E[B/\lceil B/C \rceil] = C - \frac{1}{(1-p)^C} \left[C - \frac{1-(1-p)^C}{p} \right] \ln \left[\frac{1}{1-(1-p)^C} \right] \quad (44)$$

尚, $E[B/\lceil B/C \rceil]$ の導出法は, 付録に示す。

また, システムの利用率 ρ を次のように定義する。

$$\rho = \lambda \cdot E[B] E[V] / E[B/\lceil B/C \rceil] \quad (45)$$

4.2. 待ち行列長

本稿が提案する近似解析手法の評価を, サーバ到着直前の客の平均待ち行列長の数値により行なう。まず最初に, 3.3.で示した $q_m \langle l \rangle$ の導入に対する評価を行なう。その後で, $q_m \langle l \rangle$ に対する2つの近似 (APPR-1近似とAPPR-2近似) の比較評価を行なう。尚, サーバの到着時間間隔は, 平均 $1/\mu$ の指数分布に従うとした。

図4は, $C=E[B]$ のときの客の到着率 λ と平均待ち行列長 $E[W]$ の関係を, ρ 1近似 (APPR-1), ρ 2近似 (APPR-2), シミュレーション (Simulation) の各結果について示している。この結果, 客の到着率 λ (又は, 利用率 ρ) が小さいほど, 2つの近似は精度が良いことが判る。 $q_m \langle l \rangle$ の導入ということはシステムの高負荷の場合, すなわち, 待ち行列が複数の客の集団で頻繁に構成されるような場合に対しては, 近似の精度が低くなることを意味する。故に, 客集団の到着率 λ が十分小さいとき, $q_m \langle l \rangle$ の導入は妥当なものとなる。

次に, $q_m \langle l \rangle$ に対する2つの近似の比較評価を行なう。

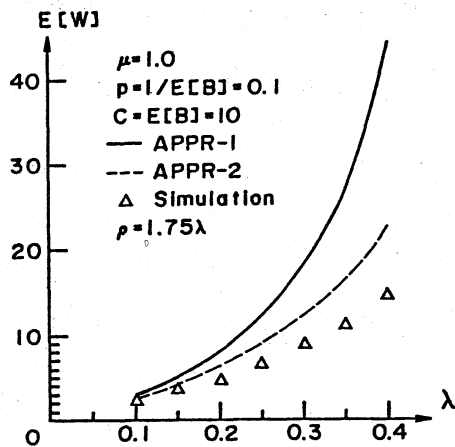


図4. 客の平均待ち行列長($E[W]$)対
集団客の到着率 λ , ($E[B]=C$)

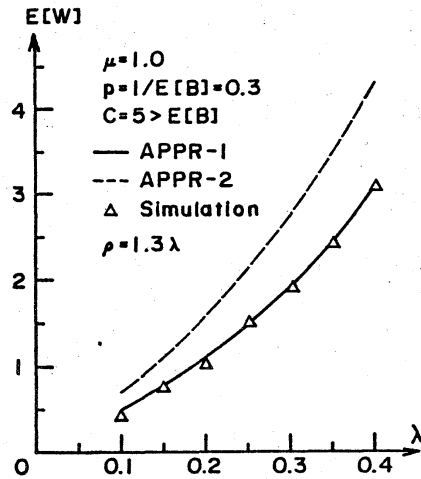


図5. 客の平均待ち行列長($E[W]$)対
集団客の到着率 λ ($E[B] < C$)

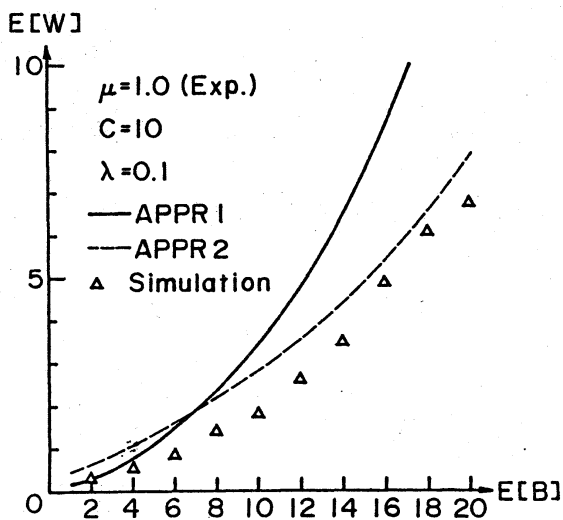


図6. 客の平均待ち行列長($E[W]$)対
平均集団サイズ($E[B]$)

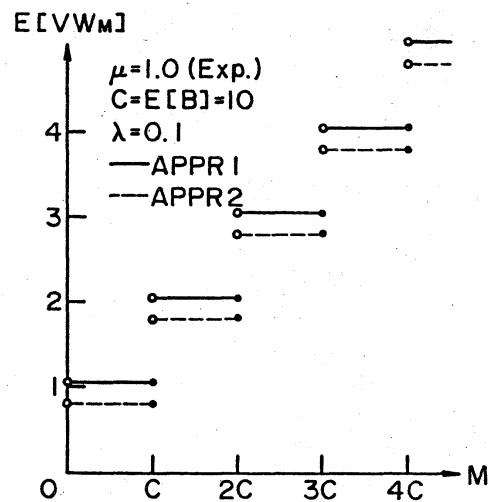


図7. 平均仮想待ち時間($E[VW_M]$)
対 集団サイズ(M)

図5は、 $E[B] < C$ の場合における λ と $E[W]$ の関係に対する 2 つの近似 (APPR-1 と APPR-2) と シミュレーション結果 (Simulation) を比較している。又、図6は $E[B]$ と $E[W]$ の関係に対する 2 つの近似とシミュレーション結果を比較している。この結果、客の到着時の集団サイズの平均 $E[B]$ とサーバの容量 C との関係により、 α_1 近似 (APPR-1) と α_2 近似 (APPR-2) の優劣が決まることが判る。すなわち、 $E[B] < C$ のときは、 α_1 近似がほぼ良く、 $E[B] \geq C$ のときは α_2 近似が良い。

4.3. 集団客の仮想待ち時間

図7に、集団客サイズ M に対する仮想待ち時間の平均値 $E[W_M]$ の特性を示す。式(42)からも明らかのように $E[W_M]$ は、基本的に、 M に関する一次式である。したがって、図7に示されるように $E[W_M]$ は、 M の増加に対して完全に階段状に増大する特性をもつ。この特性は、排他的集団サービスのサービス規範によるものである。

5. おすび

輸送形排他的集団サービス待ち行列システムでの、サーバ到着直前の客の待ち行列長に対する二つの近似解析手法と、集団客の仮想待ち時間の平均を求める近似解析手法を提案した。

近似解析手法の有効性を評価するため、シミュレーション

結果と比較を行、た結果、本稿で示した近似手法は、集団客の到着率がそれ程高くないときに良い精度をもつこと、さらに、客の到着時り集団サイズの平均がサーバの容量より小さい場合は、 α_1 近似が α_2 近似より近似精度が良く、逆の場合は α_2 近似が良いことを確認した。次に、集団客の仮想待ち時間の平均が、集団客のサイズの増加に対して完全な階段状に増大する特性をもつことを明示した。

本稿で提案した近似解析手法は、ローカルネットワークにおけるデータ通信網、複合交換網におけるデータパケットの待ち時間の解析、新交通システム／タクシー形交通システムにおける乗客の待ち行列の解析等に対して非常に有効である。

尚、今後の課題として、待ち行列の先頭の集団客と同じ属性をもつ、先頭以外の後方の客も同時にサービス可能とするサービス規範（準排他的集団サービス）に対する解析が残されている。

謝辞： 本稿をまとめるにあたって有益な示唆を頂いた大阪大学基礎工学部宮原秀夫助教授、ならびに、筆者の一人（渡辺）が、日頃御指導頂く、日本電気(株) C&C システム研究所箱崎勝也部長、山本昌弘課長、牧野武則主任に厚く謝意を表す。

文献

- (1) Cohen, J.W.: "The Single Server Queue", John Wiley & Sons, New York (1969).
- (2) Alfa, A.S.: "Time-Inhomogenous Bulk Server Queue in Discrete Time: A Transportation Type Problem," Oper. Res., 30, 4, pp 650-658 (1982).
- (3) Bailey, N.T.J.: "On Queueing Processes with Bulk Service," J. of Royal Statistical Society, B16, pp 80-87 (1954).
- (4) Jaiswal, N.K.: "A Bulk Service Queueing Problem with Variable Capacity," J. of Royal Statistical Society, B23, pp 143-148 (1961).
- (5) Miller, R.G.: "A Contribution to the Theory of Bulk Queues," J. of Royal Statistical Society, B21, pp 320-337 (1959).
- (6) Bhat, U.N.: "Imbedded Markov Chain Analysis of Single Server Bulk Queues," J. of Austral. Math. Soc. 4, pp 244-263 (1964).
- (7) Fisher, M.J. and Harris, T.C.: "A Model for Evaluating the Performance of an Integrated Circuit- and Packet- Switched Multiplex Structure," IEEE Trans. Commun., COM-24, 2, pp 195-202 (1976).
- (8) Krzysztof, P.: "Message Waiting Time in a Packet Switching System," J. Assoc. Comput. Mach., 27, 1, pp 30-41 (1980).
- (9) Konheim, A.G. and Meister, B.: "Service in a Loop System," J. Assoc. Comput. Mach., 19, 1, pp 92-108 (1972).
- (10) 渡辺, 宮原, 長谷川: "直列形複合交換網における待ち時間"

ツトの待ち行列の近似解析", 信学論(D), J64-D, 5, pp 435-442 (AB58-05).

付録

$E[B/\lceil B/C \rceil]$ の導出

今, $b_k = \Pr[B=k] = p \cdot q^{k-1}$ ($q=1-p$, $0 \leq p, q \leq 1$) より

$$E[B] = 1/p$$

$$E[B/\lceil B/C \rceil] = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \theta(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=(n-1)C+1}^{nC} k \cdot b_k \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{q^{(n-1)C}}{1-q} (1-q^C) + q^{(n-1)C} ((n-1)C - nCq^C) \right] \\ &= \frac{1}{q^C} \left(\frac{1-q^C}{1-q} - C \right) \frac{(q^C)^n}{n} + C \frac{1-q^C}{q^C} \cdot \frac{q^C}{1-q^C} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) = \frac{1}{q^C} \left(\frac{1-q^C}{1-q} - C \right) \ln \frac{1}{1-q^C} + C \frac{1-q^C}{q^C} \cdot \frac{q^C}{1-q^C}$$

$$\therefore E[B/\lceil B/C \rceil] = C - \frac{1}{(1-p)^C} \left[C - \frac{1-(1-p)^C}{p} \right] \ln \left[\frac{1}{1-(1-p)^C} \right]$$

注 1). $p=1$ のとき $E[B/\lceil B/C \rceil] = C - (C-1) = 1$

$$\odot \lim_{p \rightarrow 1} \ln \left[\frac{1}{1-(1-p)^C} \right] / (1-p)^C = 1$$

注 2) $C=1$ のとき $E[B/\lceil B/C \rceil] = C - 0 = C = 1$. //